10.5
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 224 – 225

Ερωτήσεις κατανόησης

1.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $υ_β = υ_{β΄}$ και $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α΄Β΄Γ΄)} = \frac{3}{2}$.

ποιος είναι ο λόγος $\frac{β}{β΄}$

Α: $\frac{2}{5}$ Β: $\frac{3}{4}$ Γ $\frac{3}{2}$ Δ: $\frac{9}{4}$ Ε: $\frac{4}{9}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντηση σας .

Λύση

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(Α΄Β΄Γ΄)} = \frac{\frac{1}{2}βυ_β}{\frac{1}{2}β΄υ_{β΄}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{β}{β΄}$$

2.

Δύο ρόμβοι ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν $\hat{Α} = \hat{Α}΄$ και $\frac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \frac{4}{5}$.

Να υπολογιστεί λόγος $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α΄Β΄Γ΄Δ΄)}$

Λύση

Αφού $\hat{Α} = \hat{Α}΄$ οι γωνίες των ρόμβων θα είναι ίσες και επειδή επιπλέον ισχύει

$\frac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \frac{ΒΓ}{Β΄Γ΄} = \frac{ΓΔ}{Γ΄Δ΄} = \frac{ΔΑ}{Δ΄Α΄} = \frac{4}{5}$ οι ρόμβοι είναι όμοιοι με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{4}{5}$

οπότε $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α΄Β΄Γ΄Δ΄)} = λ^2 = \frac{16}{25}$

3.

Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι ισοδύναμο με ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ που έχει Α΄Β΄·Α΄Γ΄=36 . Αν είναι $\hat{Α} + \hat{Α}΄ = 2∟$, ποιο είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς ;

Λύση

$$\hat{Α} + \hat{Α}΄ = 2∟ \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(ΑΒΓ)}{(Α΄Β΄Γ΄)} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{Α΄Β΄ \cdot Α΄Γ΄} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{ΑΒ^2}{36} \quad \Leftrightarrow \quad ΑΒ = 6$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\alpha = \alpha'$ και $\upsilon_\alpha = \frac{3}{2}\upsilon_{\alpha'}$. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $30\,m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του Α΄Β΄Γ΄.

Λύση

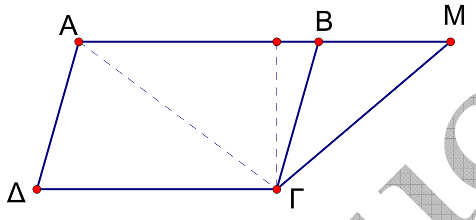
$$\frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha'\upsilon_{\alpha'}}{\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha} = \frac{\upsilon_{\alpha'}}{\upsilon_\alpha} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$(A'B'\Gamma') = \frac{2}{3}\,(AB\Gamma) \quad \Rightarrow \quad (A'B'\Gamma') = \frac{2}{3}30 \quad \Rightarrow \quad (A'B'\Gamma') = 20\,m^2$$

2.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εμβαδόν $20\,m^2$. Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε $AB = 2BM$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.

Λύση



Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ.

Τα τρίγωνα ΓΒΜ, ΓΒΑ έχουν ίδιο ύψος.

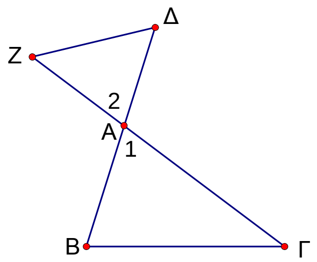
Άρα $\frac{(\Gamma BM)}{(\Gamma BA)} = \frac{BM}{BA} = \frac{BM}{2BM} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$

$$(\Gamma BM) = \frac{1}{2}(\Gamma BA) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{4}20 = 5\,m^2$$

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ζ των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΑ, ώστε $ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$ και $ΑΖ = \frac{1}{2}ΑΓ$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $30\,m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΖ.

Λύση



$$\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 \Rightarrow$$

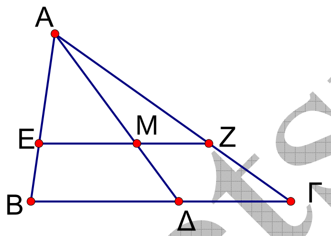
$$\frac{(ΑΔΖ)}{(ΑΒΓ)} \; \frac{ΑΔ.ΑΖ}{ΑΒ.ΑΓ} = \frac{\frac{2}{3}ΑΒ.\frac{1}{2}ΑΓ}{ΑΒ.ΑΓ} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$(ΑΔΖ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ) = \frac{1}{3}30 = 10\,m^2$$

4.

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν $75\,m^2$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ και Μ σημείο του ΑΔ τέτοιο, ώστε $\frac{ΑΜ}{ΜΔ} = \frac{3}{2}$. Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΕΖΓ.

Λύση



$$\frac{ΑΜ}{ΜΔ} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{ΑΜ}{ΑΜ + ΜΔ} = \frac{3}{3+2} \Rightarrow \frac{ΑΜ}{ΑΔ} = \frac{3}{5}$$

και με Θ. Θαλή $\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{3}{5}$

τρ.ΑΕΖ όμοιο του τρ.ΑΒΓ $\Rightarrow \frac{(ΑΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow$

$$(ΑΕΖ) = \frac{9}{25}(ΑΒΓ)$$

$$(ΑΕΖ) = \frac{9}{25}75 = 27\,m^2$$

Άρα $(ΒΕΖΓ) = (ΑΒΓ) - (ΑΕΖ) = 75 - 27 = 48\,m^2$.

5.

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 2\llcorner$. Να αποδείξετε ότι α β΄= α΄β.

Λύση

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \Rightarrow \quad \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

$$\hat{B} + \hat{B}' = 2\llcorner \quad \Rightarrow \quad \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'}$$

Άρα $\dfrac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} = \dfrac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\beta}{\beta'} = \dfrac{\alpha}{\alpha'} \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta' = \alpha'\beta$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

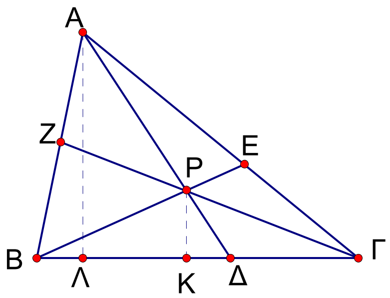
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και εσωτερικό του σημείο $Ρ$. Αν οι $ΑΡ$, $ΒΡ$ και $ΓΡ$ τέμνουν τις $ΒΓ$, $ΑΓ$ και $ΑΒ$ στα $Δ$, $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

i) $\dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}=\dfrac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)}$,   **ii)** $\dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}+\dfrac{ΡΕ}{ΒΕ}+\dfrac{ΡΖ}{ΓΖ}=1$ και   **iii)** $\dfrac{ΡΑ}{ΑΔ}+\dfrac{ΡΒ}{ΒΕ}+\dfrac{ΡΓ}{ΓΖ}=2$

Λύση

i)

Φέρουμε τα ύψη $ΡΚ$, $ΑΛ$ των τριγώνων $ΡΒΓ$, $ΑΒΓ$ αντίστοιχα και επειδή έχουν κοινή βάση $ΒΓ$, θα είναι $\dfrac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)}=\dfrac{ΡΚ}{ΑΛ}$



Τρ.$ΡΚΔ$ όμοιο του $ΑΛΔ$ $\Rightarrow \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}=\dfrac{ΡΚ}{ΑΛ}$

Άρα $\dfrac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)}=\dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}$ **(1)**

ii) Ομοίως $\dfrac{(ΓΡΑ)}{(ΑΒΓ)}=\dfrac{ΡΕ}{ΒΕ}$ **(2)**

και $\dfrac{(ΑΡΒ)}{(ΑΒΓ)}=\dfrac{ΡΖ}{ΓΖ}$ **(3)**

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $\dfrac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)}+\dfrac{(ΓΡΑ)}{(ΑΒΓ)}+\dfrac{(ΑΡΒ)}{(ΑΒΓ)}=\dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}+\dfrac{ΡΕ}{ΒΕ}+\dfrac{ΡΖ}{ΓΖ}\Rightarrow$

$$\frac{(ΒΡΓ)+(ΓΡΑ)+(ΑΡΒ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΡΔ}{ΑΔ}+\frac{ΡΕ}{ΒΕ}+\frac{ΡΖ}{ΓΖ}$$

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΡΔ}{ΑΔ}+\frac{ΡΕ}{ΒΕ}+\frac{ΡΖ}{ΓΖ}$$

$$1=\frac{ΡΔ}{ΑΔ}+\frac{ΡΕ}{ΒΕ}+\frac{ΡΖ}{ΓΖ}$$

iii)

$\dfrac{ΡΑ}{ΑΔ}=\dfrac{ΑΔ-ΡΔ}{ΑΔ}=1-\dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}$ ομοίως

$\dfrac{ΡΒ}{ΒΕ}=\ldots\ldots\ldots=1-\dfrac{ΡΕ}{ΒΕ}$ και

$\dfrac{ΡΓ}{ΓΖ}=\ldots\ldots\ldots=1-\dfrac{ΡΖ}{ΓΖ}$

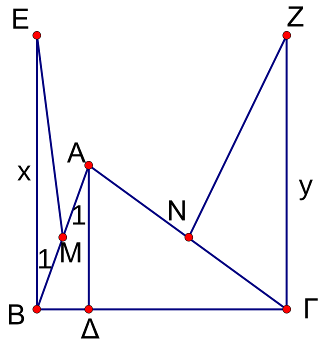
Προσθέτουμε κατά μέλη $\dfrac{ΡΑ}{ΑΔ}+\dfrac{ΡΒ}{ΒΕ}+\dfrac{ΡΓ}{ΓΖ}=3-\left(\dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}+\dfrac{ΡΕ}{ΒΕ}+\dfrac{ΡΖ}{ΓΖ}\right)\Rightarrow$

$$\frac{ΡΑ}{ΑΔ}+\frac{ΡΒ}{ΒΕ}+\frac{ΡΓ}{ΓΖ}=3-1=2$$

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}, \hat{\Gamma} < 1\llcorner$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ,Α) φέρουμε $Bx \perp B\Gamma$ και $\Gamma y \perp B\Gamma$. Πάνω στις Bx, Γy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ, ώστε να είναι ΒΕ = ΓΖ = 2ΑΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΕΒΜ) + (ΖΓΝ) = (ΑΒΓ).

Λύση



$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(EBM)}{(AB\Delta)} = \frac{BM \cdot BE}{AB \cdot A\Delta} = \frac{1}{2}2 = 1 \quad \Rightarrow$$

(ΕΒΜ) = (ΑΒΔ)

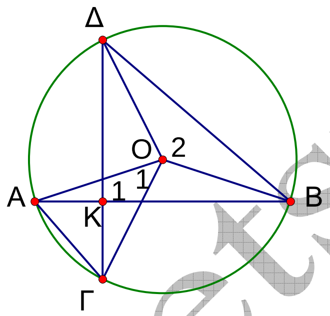
Ομοίως (ΖΓΝ) = (ΑΓΔ)

Προσθέτουμε (ΕΒΜ) + (ΖΓΝ) = (ΑΒΓ).

3.

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι (ΒΟΔ) = (ΑΟΓ).

Λύση



$$\hat{K}_1 = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{B\Delta}}{2} \quad \Rightarrow \quad 1\llcorner = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{B\Delta}}{2}$$

$$\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{B\Delta} = 2\llcorner$$

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\llcorner$$

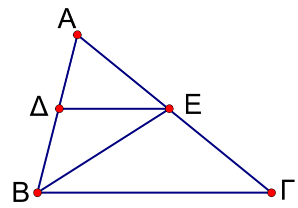
$$\frac{(BO\Delta)}{(AO\Gamma)} = \frac{OB \cdot O\Delta}{OA \cdot O\Gamma} = 1$$

(ΒΟΔ) = (ΑΟΓ).

4.

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Ευθεία παράλληλη προς τη $ΒΓ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Δ$ και την $ΑΓ$ στο $Ε$. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΕ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$.

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)}$

Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$, $ΑΔΕ$ έχουν ίδιο ύψος από το $Ε$,

άρα $\dfrac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΔ}$ **(1)**

Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΑΒΕ$ έχουν ίδιο ύψος από το $Β$, άρα $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΕ}$ **(2)**

Θ.Θαλή $\Rightarrow \dfrac{ΑΒ}{ΑΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΕ}$ **(3)**

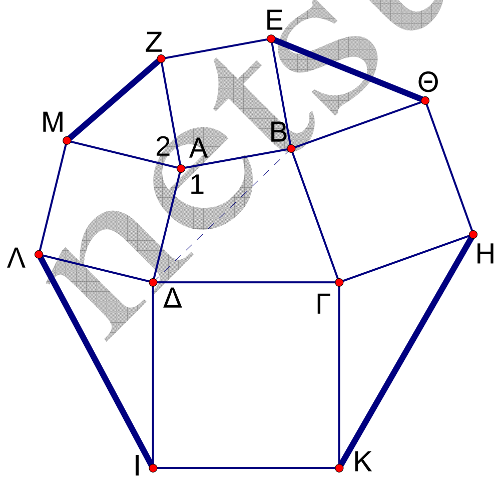
(1), (2), (3) $\Rightarrow \dfrac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)}$

5.

Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα $ΑΒΕΖ$, $ΒΓΗΘ$, $ΓΔΙΚ$ και $ΑΔΛΜ$. Να αποδείξετε ότι

$$(ΑΜΖ) + (ΓΗΚ) = (ΒΘΕ) + (ΔΙΛ)$$

Λύση



Φέρουμε τη διαγώνιο $ΒΔ$.

$\hat{Α}_1 + \hat{Α}_2 = 2∟ \Rightarrow$

$\dfrac{(ΑΜΖ)}{(ΑΒΔ)} = \dfrac{ΑΜ \cdot ΑΖ}{ΑΒ \cdot ΑΔ} = 1 \Rightarrow$

$(ΑΜΖ) = (ΑΒΔ)$ και ομοίως
$(ΓΗΚ) = (ΓΒΔ)$

Άρα $(ΑΜΖ) + (ΓΗΚ) = (ΑΒΓΔ)$

Ομοίως $(ΒΘΕ) + (ΔΙΛ) = (ΑΒΓΔ)$

Άρα $(ΑΜΖ) + (ΓΗΚ) = (ΒΘΕ) + (ΔΙΛ)$

6.

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 1\llcorner)$ και τρία πολύγωνα P_1, P_2 και P_3 όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $(P_2) + (P_3) = (P_1)$, όπου (P_1), (P_2) και (P_3) τα εμβαδά τους.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{(P_2)}{(P_1)} + \dfrac{(P_3)}{(P_1)} = 1$

Πολύγωνο P_2 όμοιο του P_1 $\Rightarrow$ $\dfrac{(P_2)}{(P_1)} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$

Ομοίως …………………… $\Rightarrow$ $\dfrac{(P_3)}{(P_1)} = \left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{\beta^2}{\alpha^2} + \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2} = 1$, ή $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ που ισχύει.

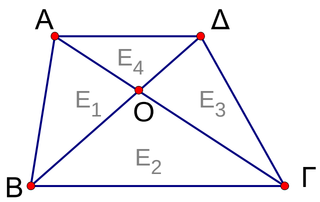
Σύνθετα Θέματα

1.

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν E_1, E_2, E_3 και E_4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $E_1 E_3 = E_2 E_4$. Αν υποθέσουμε ότι η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι

i) $E_1 = E_3$, **ii)** $E_1^2 = E_2 E_4$, **iii)** $E_1 \le \frac{1}{4}E$, όπου $E = (ΑΒΓΔ)$

Λύση



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_4}{E_3}$

Τα τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ έχουν κοινό ύψος από το Β

άρα $\frac{E_1}{E_2} = \frac{ΟΑ}{ΟΓ}$ και ομοίως $\frac{E_4}{E_3} = \frac{ΟΑ}{ΟΓ}$

Άρα $\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_4}{E_3}$

i)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $E_1 + E_2 = E_3 + E_2$, δηλαδή ότι (ΑΒΓ) = (ΔΒΓ), το οποίο συμβαίνει αφού $ΑΔ \parallel ΒΓ$.

ii)

Αφού $E_1 = E_3$, η ισότητα $E_1 E_3 = E_2 E_4$ γίνεται

$$E_1 E_1 = E_2 E_4 \quad \Rightarrow \quad E_1^2 = E_2 E_4$$

iii)

$$E_1 \le \frac{1}{4}E \quad \Leftrightarrow \quad 4E_1 \le E$$

$$4E_1 \le E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$

$$2E_1 \le E_2 + E_4 \quad (\text{αφού } E_1 = E_3)$$

$$2\sqrt{E_2 E_4} \le E_2 + E_4 \quad (\text{αφού } E_1^2 = E_2 E_4)$$

$$4 E_2 E_4 \le (E_2 + E_4)^2$$

$$4 E_2 E_4 \le E_2^2 + 2 E_2 E_4 + E_4^2$$

$$0 \le E_2^2 - 2 E_2 E_4 + E_4^2$$

$$0 \le (E_2 - E_4)^2, \quad \text{που ισχύει.}$$

2.
Από εσωτερικό σημείο Σ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν E_1, E_2, E_3 είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται, να αποδείξετε ότι

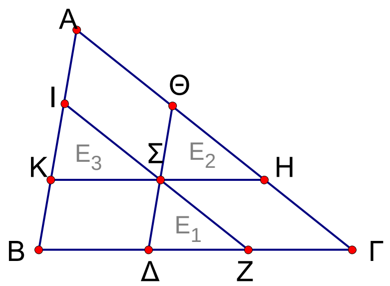
i) καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών E_1, E_2, E_3 είναι όμοιο με το $AB\Gamma$

ii) $\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}+\sqrt{E_3}=\sqrt{E}$, όπου $E=(AB\Gamma)$

Λύση

i)
Λόγω των παραλλήλων, είναι προφανές ότι καθένα από τα τρία τρίγωνα έχει ίσες γωνίες με το τρίγωνο $AB\Gamma$

ii)



Αρκεί να δειχθεί ότι $\dfrac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E}}+\dfrac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E}}+\dfrac{\sqrt{E_3}}{\sqrt{E}}=1$

Τρ.ΣΔΖ όμοιο $AB\Gamma$ $\Rightarrow \dfrac{E_1}{E}=\left(\dfrac{\Delta Z}{B\Gamma}\right)^2 \Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E}}=\frac{\Delta Z}{B\Gamma}$$

Ομοίως $\dfrac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E}}=\dfrac{\Sigma H}{B\Gamma}=\dfrac{Z\Gamma}{B\Gamma}$ και $\dfrac{\sqrt{E_3}}{\sqrt{E}}=\dfrac{K\Sigma}{B\Gamma}=\dfrac{B\Delta}{B\Gamma}$

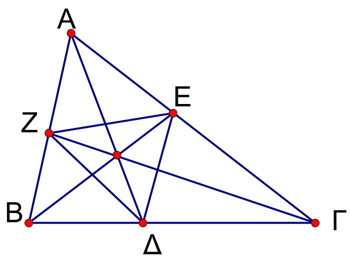
Άρα $\dfrac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E}}+\dfrac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E}}+\dfrac{\sqrt{E_3}}{\sqrt{E}}=\dfrac{\Delta Z}{B\Gamma}+\dfrac{Z\Gamma}{B\Gamma}+\dfrac{B\Delta}{B\Gamma}=\dfrac{\Delta Z+Z\Gamma+B\Delta}{B\Gamma}=\dfrac{B\Gamma}{B\Gamma}=1$

3.
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τις διχοτόμους $A\Delta$, BE και ΓZ. Να αποδείξετε ότι

i) $(\Delta EZ) = \dfrac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}(AB\Gamma)$

ii) $(\Delta EZ) \le \dfrac{1}{4}(AB\Gamma)$

Λύση



i)

Τα τρίγωνα AZE, $AB\Gamma$ έχουν $\hat{A}$ κοινή $\Rightarrow$

$$\frac{(AZE)}{(AB\Gamma)} = \frac{AZ.AE}{\gamma\beta} \Rightarrow$$

$$(AZE) = \frac{1}{\gamma\beta}\,\frac{\gamma\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}(AB\Gamma) \Rightarrow$$

$$(AZE) = \frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}(AB\Gamma) \text{ και κυκλικά}$$

$$(B\Delta Z) = \frac{\gamma\alpha}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}(AB\Gamma)$$

$$(\Gamma E\Delta) = \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}(AB\Gamma)$$

$$(\Delta EZ) = (AB\Gamma) - (AZE) - (B\Delta Z) - (\Gamma E\Delta) =$$

$$= (AB\Gamma) - \frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}(AB\Gamma) - \frac{\gamma\alpha}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}(AB\Gamma) - \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}(AB\Gamma)$$

$$= \left(1 - \frac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} - \frac{\gamma\alpha}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)} - \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}\right)(AB\Gamma)$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) - \beta\gamma(\beta+\gamma) - \gamma\alpha(\gamma+\alpha) - \alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}(AB\Gamma)$$

$=$ πράξεις στον αριθμητή……………………….. $= \dfrac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}(AB\Gamma)$

ii)

$$(\Delta EZ) \le \frac{1}{4}(AB\Gamma) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}(AB\Gamma) \le \frac{1}{4}(AB\Gamma)$$

$$8\alpha\beta\gamma \le (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

$$8\alpha\beta\gamma \le \alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta\gamma^2 + \beta\gamma\alpha$$

$$0 \le \alpha^2\beta + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta\gamma^2 - 6\beta\gamma\alpha$$

$$0 \le (\alpha\gamma^2 + \alpha\beta^2 - 2\alpha\beta\gamma) + (\beta\gamma^2 + \beta\alpha^2 - 2\beta\gamma\alpha) + (\gamma\alpha^2 + \gamma\beta^2 - 2\alpha\beta\gamma)$$

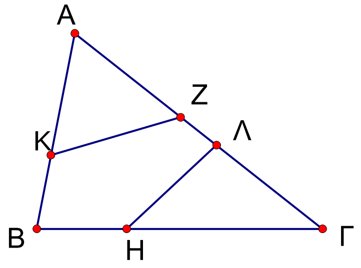
$$0 \le \alpha(\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma)^2 + \beta(\gamma^2 + \alpha^2 - 2\alpha\gamma) + \gamma(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)$$

$0 \le \alpha(\beta-\gamma)^2 + \beta(\gamma-\alpha)^2 + \gamma(\alpha-\beta)^2$ που ισχύει.

4.

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημεία $Κ$, $Λ$ των πλευρών $ΑΒ$, $ΑΓ$ αντίστοιχα. Από τα $Κ$, $Λ$ να φέρετε δύο ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα μέρη.

Λύση



Ανάλυση

Έστω $ΚΖ$ η μία από τις ζητούμενες ευθείες.

Τότε $(ΑΚΖ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ) \Rightarrow$

$$\frac{(ΑΚΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3} \qquad \textbf{(1)}$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το τμήμα $ΑΖ$ συναρτήσει γνωστών τμημάτων.

Τα τρίγωνα $ΑΚΖ$, $ΑΒΓ$ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{Α} \Rightarrow \frac{(ΑΚΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΚ \cdot ΑΖ}{ΑΒ \cdot ΑΓ}$ **(2)**

$$(1),\ (2) \Rightarrow \frac{ΑΚ \cdot ΑΖ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3ΑΚ \cdot ΑΖ = ΑΒ \cdot ΑΓ \Rightarrow ΑΖ = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{3ΑΚ}$$

Σύνθεση

Πάνω στην $ΑΓ$ τοποθετούμε σημείο $Ζ$ τέτοιο, ώστε $ΑΖ = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{3ΑΚ}$ και φέρουμε την $ΚΖ$.

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε και τη δεύτερη ζητούμενη ευθεία $ΛΗ$.